EXÁMEN ANÁLISIS NUMÉRICO

14 DE FEBRERO DE 2007

PARTE PRACTICA

(1) Sean r, x_0 dos números positivos y la función:

$$g(x) = \frac{x(x^2+3r)}{3x^2+r}.$$

Se estudiará la sucesión definida por $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \ldots$.

(a) Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ es localmente convergente, que su límite es no nulo e igual a $\sqrt{r}$.

(b) Pruebe que la convergencia es exactamente de orden 3.

(2) Consideremos el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. En ese conjunto se define el producto interno:

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

Aproximar la función $\sin(x)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ mediante un polinomio lineal, utilizando como base $\{1, x\}$.

(3) Sea A una matriz con coeficientes reales, $n \times n$ e invertible. Sea B una matriz invertible de modo que $\|B - A^{-1}\|$ es pequeña. Sea $R = I - BA$. Sea X^0 igual a la matriz $n \times n$ nula. Definir

$$X^{k+1} := B + RX^k$$

(a) Mostrar que $X^{k+1} = (I + R + \cdots + R^k)B$.

(b) Mostrar que si $\|R\| < 1$, entonces la sucesión $\{X^k\}$ converge.

(c) Mostrar que si X^k converge, entonces su límite es A^{-1}.

(d) Sean $\alpha := \|R\| < 1$ y sea $E^k = A^{-1} - X^k$. Mostrar que $\|E^k\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|B\|$.

(4) En una máquina de punto flotante ($\beta = 10, t = 7, L = -10, U = 12$) determinar una cota del error relativo al calcular la función $f(x, y) = sen(x) + cos(x)/y$ en $x = \pi, y = \sqrt{3}$.

(5) **Sólo para libres:** Sean T y M las aproximaciones a $\int_a^b f(x)dx$ dadas por la regla del trapecio y la regla del punto medio correspondientes a la partición $p = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$. Sea τ la partición del intervalo $[a, b]$ que se obtiene al agregar a p los puntos medios de los intervalos $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \cdots, n-1$. Sea S la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ asociada a la partición τ por la regla de Simpson. Mostrar que $S = \frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$.